

UNE SEXTIQUE HYPERBOLIQUE DANS $P^3(\mathbf{C})$

JULIEN DUVAL

RÉSUMÉ. On construit une sextique hyperbolique dans $P^3(\mathbf{C})$.

A HYPERBOLIC SEXTIC SURFACE IN $P^3(\mathbf{C})$

ABSTRACT. We construct a hyperbolic sextic surface in $P^3(\mathbf{C})$.

Une partie de $P^3(\mathbf{C})$ est *hyperbolique* si elle ne contient pas de courbe entière, i.e. d'image holomorphe non constante de \mathbf{C} . La conjecture de Kobayashi dans l'espace projectif stipule qu'une surface générique de degré ≥ 5 de $P^3(\mathbf{C})$ est hyperbolique. Elle a été démontrée pour les degrés ≥ 21 par J.-P. Demailly et J. El Goul [3]. Parallèlement, et de manière plus modeste, un certain nombre d'auteurs (voir les références dans [5]) ont cherché à construire des exemples de surfaces hyperboliques de degré le plus bas possible. A ce jour, la meilleure borne était le degré 8. Le but de cette note est de montrer l'existence de surfaces hyperboliques de degré 6 :

Théorème. *Il existe des sextiques hyperboliques.*

L'argument est un raffinement de la méthode de filtrage (percolation) de B. Shiffman et M. Zaidenberg (voir par exemple [4]). La question se réduit à l'impossibilité de faire passer une courbe entière par un filtre convenable du plan projectif : on se ramène à l'hyperbolicité d'un complémentaire de la forme $P^2(\mathbf{C}) \setminus (Q^* \cup C^*)$, avec $Q^* = Q \setminus C'$ et $C^* = C \setminus Q'$, Q, Q' étant des coniques et C, C' des cubiques de $P^2(\mathbf{C})$. La souplesse de choix de C' et Q' permet alors une seconde réduction à l'hyperbolicité de $P^2(\mathbf{C}) \setminus (Q \cup C)$. Celle-ci est connue si $Q \cup C$ est assez proche d'une configuration plus dégénérée.

Détaillons cette approche.

Les deux ingrédients principaux en sont le lemme de Brody [2] et la persistance d'intersection. Le premier sera employé sous la forme suivante :

d'une suite de courbes entières, on peut extraire une sous-suite convergeant (localement uniformément après reparamétrisation) vers une courbe entière.

La seconde s'énonce ainsi dans $P^3(\mathbf{C})$:

soit (L_n) une suite de courbes entières convergeant vers une courbe entière L et (S_n) une suite de surfaces convergeant vers une surface S . Si L n'est pas contenue dans S , alors L_n coupe S_n près de tout point de $L \cap S$ pour n assez grand.

En les combinant, on obtient, dans nombre de cas, le fait que l'hyperbolicité est une propriété ouverte pour les complémentaires. Par exemple :

Un cas d'ouverture. Soient S, S' deux surfaces dans $P^3(\mathbf{C})$ et U un ouvert de S' . On suppose $S \cap S'$ et $S \setminus U$ hyperboliques; alors, pour toute surface S_ϵ proche de S , $S_\epsilon \setminus U$ est encore hyperbolique.

Sinon, on produit une suite (L_n) de courbes entières dans $S_{\epsilon_n} \setminus U$ convergeant vers L dans S . Par hyperbolicité de $S \cap S'$, L n'est pas contenue dans S' . Par persistance d'intersection, puisque L_n évite U il en est de même pour L . Ceci contredit l'hyperbolicité de $S \setminus U$. \square

Voici maintenant le principe de filtrage de Shiffman et Zaidenberg [4] :

Filtrage. Soient $S_i = (f_i = 0)$ trois surfaces de degré d_i dans $P^3(\mathbf{C})$ avec $d_3 = d_1 + d_2$. On suppose $S_1 \cap S_2$, $S_1 \setminus (S_2 \setminus S_3)$ et $S_2 \setminus (S_1 \setminus S_3)$ hyperboliques. Alors la surface $S_\epsilon = (f_1 f_2 = \epsilon f_3)$ est hyperbolique pour ϵ petit non nul.

Sinon, on construit une suite (L_n) de courbes entières dans S_{ϵ_n} convergeant vers une courbe entière L . Celle-ci est dans $S_1 \cup S_2$, donc par exemple dans S_1 . Par hypothèse, L ne peut être contenue dans l'intersection $S_1 \cap S_2$. Donc, si L coupe S_2 hors de S_3 , par persistance d'intersection L_n en fait autant. Or $S_{\epsilon_n} \cap S_2$ est contenue dans S_3 , contradiction. \square

En raffinant cet argument, on s'autorise le contrôle d'un seul complémentaire :

Première variante. On part des mêmes trois surfaces dans $P^3(\mathbf{C})$ avec de plus $d_2 = m d_1$. On suppose $S_1 \cap S_2$ et $S_1 \setminus (S_2 \setminus S_3)$ hyperboliques. Alors la surface $S_\epsilon = (f_1(f_1^m + \epsilon_1 f_2) = \epsilon_2 f_3)$ est hyperbolique pour ϵ_1, ϵ_2 petits non nuls.

En effet, posons $S = (f_1^m + \epsilon_1 f_2 = 0)$. Par ouverture, l'hypothèse entraîne l'hyperbolicité de $S \setminus (S_2 \setminus S_3)$ pour ϵ_1 petit non nul. Or $S \cap S_2 = S \cap S_1 = S_1 \cap S_2$. Ainsi $S \setminus (S_2 \setminus S_3) = S \setminus (S_1 \setminus S_3)$ et $S_1 \setminus (S_2 \setminus S_3) = S_1 \setminus (S \setminus S_3)$. Le principe de filtrage s'applique donc aux surfaces S_1 , S et S_3 . \square

En voici un analogue relatif laissé au lecteur (mêmes notations) :

Deuxième variante. Soit de plus U un ouvert d'une quatrième surface S_4 en position générale par rapport aux trois premières. On suppose $S_1 \cap S_2 \setminus U$, $S_1 \cap S_4 \setminus S_2$ et $S_1 \setminus ((S_2 \setminus S_3) \cup U)$ hyperboliques. Alors le complémentaire $S_\epsilon \setminus U$ est hyperbolique pour ϵ_1, ϵ_2 petits non nuls.

La combinaison de ces deux variantes fournit la réduction voulue :

Lemme. Soient P un plan, Q, Q' deux quadriques et C, C' deux cubiques, en position générale dans $P^3(\mathbf{C})$, d'équations respectives $(p, q, q', c, c' = 0)$. On suppose le complémentaire $P \setminus (Q^* \cup C^*)$ hyperbolique, avec $Q^* = Q \setminus C'$ et $C^* = C \setminus Q'$. Alors la sextique $S = (c_\epsilon(c_\epsilon + \epsilon_3 c) = \epsilon_4(q')^3)$, où $c_\epsilon = (p(p^2 + \epsilon_1 q) - \epsilon_2 c')$, est hyperbolique pour $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ petits non nuls.

En effet, notons C_ϵ la cubique d'équation $(c_\epsilon = 0)$. La deuxième variante entraîne que $C_\epsilon \setminus C^*$ est hyperbolique pour ϵ_1, ϵ_2 petits non nuls : en prenant $S_1 = P, S_2 = Q, S_3 = C'$ et $U = C^*$, il suffit de vérifier l'hyperbolicité de $P \cap Q \setminus C$ et $P \cap C \setminus Q$; or $P \cap Q \cap C$ contient 6 points, et toute courbe irréductible privée de 3 points est hyperbolique. Puis, par la première variante appliquée à $S_1 = C_\epsilon, S_2 = C$ et $S_3 = 3Q'$, on obtient bien que S est hyperbolique puisque $C_\epsilon \cap C$ est une courbe de genre 10. \square

Fabrication du filtre.

Reste maintenant à satisfaire l'hypothèse du lemme. C'est une question dans le plan projectif $P^2(\mathbf{C})$. Commençons par produire une conique Q et une cubique C en position générale avec $P^2(\mathbf{C}) \setminus (Q \cup C)$ hyperbolique. Partons pour cela d'une configuration de deux droites D_1, D_2 et d'une cubique C , en position générale. Le complémentaire $P^2(\mathbf{C}) \setminus (D_1 \cup D_2 \cup C)$ est alors hyperbolique d'après [1]. Un argument d'ouverture laissé au lecteur permet de déformer un peu $D_1 \cup D_2$ en une conique Q , en préservant l'hyperbolicité de $P^2(\mathbf{C}) \setminus (Q \cup C)$.

Puis on va percer les trous du filtre sur Q et C . Cela se fait en deux temps. On perturbe d'abord de manière non générique Q, C en Q'', C'' . On crée un ensemble T de 6 trous dans $Q \cup C$ défini par $Q \cup C \setminus T = (Q \setminus C'') \cup (C \setminus Q'')$, en préservant l'hyperbolicité de $P^2(\mathbf{C}) \setminus (Q \cup C \setminus T)$. Ensuite on perturbe génériquement Q'', C'' en Q', C' . On obtient maintenant les 12 trous voulus, en préservant l'hyperbolicité de $P^2(\mathbf{C}) \setminus (Q^* \cup C^*)$ (notations du lemme).

Détaillons la première étape (la seconde, analogue, sera laissée au lecteur).

Notons x_1, \dots, x_6 les 6 points de l'intersection $Q \cap C$. On perturbe Q en une conique Q'' en conservant les trois premières intersections avec C . On aura donc

$$Q'' \cap C = \{x_1, x_2, x_3, t_4, t_5, t_6\}.$$

Symétriquement, on perturbe C en une cubique C'' en conservant les trois dernières intersections avec Q , donc

$$C'' \cap Q = \{x_4, x_5, x_6, t_1, t_2, t_3\}.$$

Ici $T = \{t_1, \dots, t_6\}$ est disjoint de $Q \cap C$. Montrons que, si Q'', C'' sont assez proches de Q, C , le complémentaire $P^2(\mathbf{C}) \setminus (Q \cup C \setminus T)$ est encore hyperbolique.

Sinon, on produit une suite (L_n) de courbes entières dans $P^2(\mathbf{C}) \setminus (Q \cup C \setminus T_n)$ (avec des notations évidentes) convergeant vers une courbe entière L . Remarquons que la courbe L_n évite C près de x_1, x_2, x_3 , et évite Q près de x_4, x_5, x_6 .

Vérifions que L n'est pas contenue dans $Q \cup C$: en effet, si elle était contenue dans C par exemple, elle couperait Q en l'un des points x_4, x_5, x_6 (C privée de trois points est hyperbolique); par persistance d'intersection L_n couperait encore Q près de l'un de ces points, contradiction.

Maintenant L doit couper $Q \cup C$ puisque $P^2(\mathbf{C}) \setminus (Q \cup C)$ est hyperbolique. Par persistance d'intersection et comme T_n converge vers $Q \cap C$, L coupe en fait $Q \cup C$ en un point de $Q \cap C$. Donc, toujours par persistance d'intersection, L_n va couper à la fois C et Q près d'un point de $Q \cap C$, contradiction. \square

REFERENCES

1. F. Berteloot, J. Duval, *Sur l'hyperbolicité de certains complémentaires*, Ens. Math. **47** (2001), 253–267.
2. R. Brody, *Compact manifolds and hyperbolicity*, Trans. Amer. Math. Soc. **235** (1978), 213–219.
3. J.-P. Demailly, J. El Goul, *Hyperbolicity of generic surfaces of high degree in projective 3-space*, Amer. J. Math. **122** (2000), 515–546.
4. B. Shiffman, M. Zaidenberg, *New examples of hyperbolic octic surfaces in P^3* , preprint 2003 arXiv math.AG/0306360.
5. M. Zaidenberg, *Hyperbolic surfaces in P^3 : examples*, preprint 2003 arXiv math.AG/0311394.

LABORATOIRE ÉMILE PICARD, UMR CNRS 5580, UNIVERSITÉ PAUL SABATIER, 31062 TOULOUSE CEDEX 4, FRANCE.

E-mail address: duval@picard.ups-tlse.fr